Олимпиада-2019
8 класс. Решения

Некоторые задачи можно решать несколькими способами. Предлагается один из способов.

1. Найдем область допустимых значений переменной x в уравнении:

$$\begin{cases} 2018-2019x \ge 0; \\ 2020x-2019 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{2018}{2019}; \\ x \ge \dfrac{2019}{2020}; \end{cases}$$

$$\frac{2018}{2019}=1-\frac{1}{2019}>\frac{2019}{2020}=1-\frac{1}{2020}.$$

Система неравенств не имеет решения, а значит, уравнение не определено ни в одной точке и не имеет решений.

Ответ: ни одного корня.

2. Пусть процентное содержание меди в 1-м бруске p, а во 2-м – q. Вес отрезанного куска обозначим x. Получаем уравнение

$$\frac{1}{6}\left(\frac{p}{100}\cdot x+\frac{q}{100}(6-x)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{q}{100}x+\frac{p}{100}(4-x)\right),$$

откуда

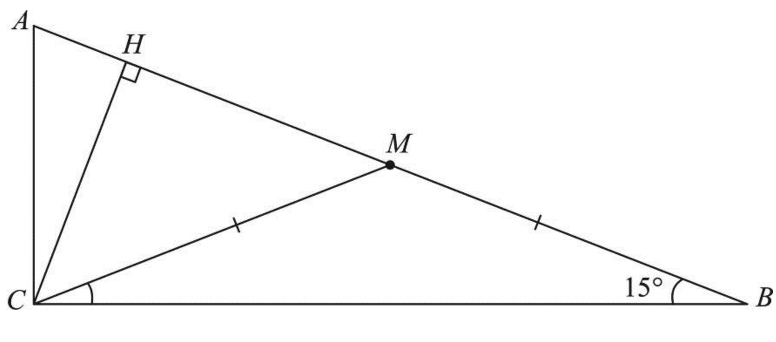
$$\frac{p-q}{100}\cdot x\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)=\frac{p-q}{100}.$$

Поскольку $p \ne q,$ то

$$x=\frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{2+3}=2,4.$$

Ответ: 2,4 кг.

3.



Проведем медиану CM треугольника ABC. Тогда $AM = CM = MB$, $\angle CMA = 30°$ (внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним):

$$CM = 2CH = 2, \quad AB = 2CM = 4.$$

Ответ: 4.

4. Из условия задачи

$$a_{17}=\frac{5-a_{16}}{a_{16}+1}=5, \text{ откуда } a_{16}=0;$$

$$a_{18}=f(a_{17})=0;$$

$$a_{16} = \frac{5 - a_{15}}{a_{15} + 1} = 0, \text{ откуда } a_{15} = 5$$

и т.д.

Таким образом, члены последовательности с нечетными номерами равны 5, а с четными – 0. Следовательно, $a_{11} \cdot a_{123} = 5 \cdot 5 = 25.$

Ответ: 25.

5. Преобразуем равенство $(x^2 + 1)(y^2 + 10) + 2x(3y + 3yz - 2) + 9z^2 = 6$. Для этого раскроем скобки и выделим полные квадраты по переменным. Получаем:

$x^2y^2 + 10x^2 + y^2 + 6xy + 6xyz - 4x + 9z^2 + 4 = 0;$

$(x^2y^2 + 6xyz + 9z^2) + (y^2 + 6xy + 9x^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0;$

$(xy + 3z)^2 + (y + 3x)^2 + (x - 2)^2 = 0.$

Так как каждое слагаемое, входящее в левую часть равенства, неотрицательно, то полученное уравнение эквивалентно системе уравнений $\begin{cases} xy + 3z = 0, \\ y + 3x = 0, \\ x - 2 = 0. \end{cases}$ Решение системы $x = 2$, $y = -6$, $z = 4$.
Теперь найдем сумму: $x + y + z = 2 + (-6) + 4 = 0.$

Ответ: 0.