Олимпиада-2018
8 класс. Решения

Некоторые задачи можно решать несколькими способами. Предлагается один из способов

1. 396 = 4 · 9 · 11.

Число делится на 4, так как две последние цифры образуют число, делящееся на 4 (56 = 4 · 14).

Число делится на 9, так как сумма его цифр, не зависящая от порядка расстановки цифр, равна 5 + 2 + 3 + 6 + 2 + 7 + 8 + 2 + 1 + 3 + 2 + 2 + 5 + 6 + 1 + 2 +3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 99 и делится на 9.

Сумма цифр, стоящих на нечетных местах, равна: 5 + 2 + 3 + 6 + 2 + 7 + 8 + 1 + 3 + 2 + 5 = 44.

Сумма цифр, стоящих на четных местах, не зависит от порядка их расстановки и равна:

2 + 2 + 6 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 55.

Разность между этими суммами равна 11, а значит, число делится на 11.

Таким образом, данное число всегда будет делиться на 396.

2. Сгруппируем слагаемые и перепишем уравнение: $x^2+16y^2-8xy+6(x-4y)+9+y^2-10y+25=0$; $(x-4y+3)^2+(y-5)^2=0$.

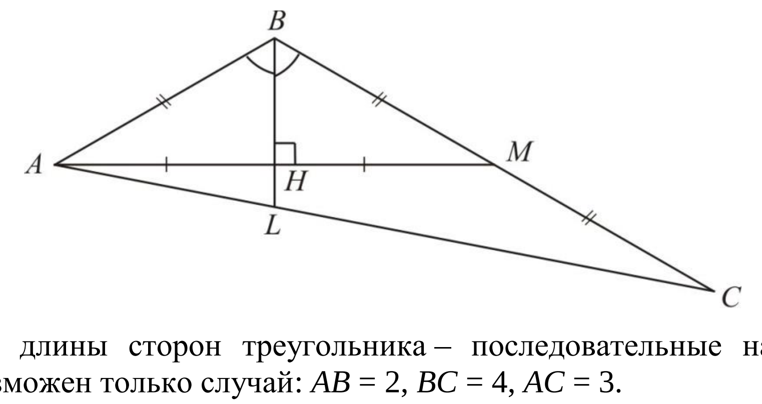
Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю только в том случае, если все ее слагаемые равны нулю. Отсюда $y = 5$, $x = 4y - 3 = 17$.

Ответ: (17; 5).

3. Последние цифры степеней чисел, оканчивающихся на 7, повторяются с периодом 4 и образуют последовательность 7; 9; 3; 1; 7... Последние цифры степеней чисел, оканчивающихся на 8, повторяются также с периодом 4 и образуют последовательность 8; 4; 2; 6; 8... Поскольку 2018 = 504 · 4 + 2, а 2017 = 504 · 4 + 1, то последней цифрой числа 2017^{2018} будет 9 (вторая цифра в периоде), а число 2018^{2017} будет оканчиваться на 8. Тогда последней цифрой числа $2017^{2018}-2018^{2017}$ будет 1 (9 – 8 = 1).

Ответ: 1.

4. Пусть биссектриса BL перпендикулярна медиане AM. Тогда треугольник ABM – равнобедренный, так как BH – биссектриса и высота: $AB = BM = \frac{1}{2}BC$, $BC = 2AB$.



По условию, длины сторон треугольника – последовательные натуральные числа. Следовательно, возможен только случай: $AB = 2$, $BC = 4$, $AC = 3$.

Убедимся, что в таком треугольнике действительно выполняется условие: $AM \perp BL$.

Выразим по теореме косинусов AB из ΔABM и AC из ΔAMC, сложим полученные равенства и выразим из него AM :

$$AM = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$BL = \sqrt{AB \cdot BC - AL \cdot LC} = \sqrt{2 \cdot 4 - 1 \cdot 2} = \sqrt{6} \text{ (по свойству биссектрисы } \frac{AL}{AB} = \frac{LC}{BC}\text{)},$$

$$BH = \frac{3}{4} BL \text{ (соотношение получается из теоремы Менелая)},$$

$$BH = \frac{3}{4}\sqrt{6}, \quad AH = \frac{1}{2} AM = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$AH^2 + BH^2 = \frac{54}{16} + \frac{10}{16} = 4 = AB^2.$$

По теореме, обратной теореме Пифагора, ΔABH – прямоугольный. Итак, треугольник со сторонами 2, 3 и 4 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 2, 3 и 4.

5. Обозначим расстояние между *A* и *B* через *S*, скорость велосипедиста – через *x*, скорость мотоциклиста – через *y*, а время, через которое они встретились, – через *t*. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x+y} = t; & (1) \\ \dfrac{S}{2x+y} = t - \dfrac{1}{2}; & (2) \\ \dfrac{S}{x+2y} = t - \dfrac{4}{5}. & (3) \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе, а затем – на третье. Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x+y} = \dfrac{t}{t - \frac{1}{2}}; \\ \dfrac{2y+x}{x+y} = \dfrac{t}{t - \frac{4}{5}}. \end{cases}$$

Преобразуем полученные уравнения, выделив целые части в дробях:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y} = \dfrac{1}{2t-1}; \\ \dfrac{y}{x+y} = \dfrac{4}{5t-4}. \end{cases}$$

Сложим полученные уравнения:

$$1 = \frac{1}{2t-1} + \frac{4}{5t-4},$$

$$\begin{cases} (2t-1)(5t-4) = 5t - 4 + 8t - 4; \\ t > \dfrac{4}{5}, \end{cases}$$

$$5t^2 - 13t + 6 = 0,$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{3}{5} \text{ (не удовлетворяет условию).}$$

Итак, время до встречи равно 2 ч, следовательно, путники выехали в 12 ч дня.
Ответ: в 12 ч.